لنگه جوراب

قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی سمنان

مقدمه

همهٔ ما بارها به این مشکل برخورد کرده‌ایم که عجله داریم و سراغ کشوی جوراب‌ها می‌رویم و یک لنگه جوراب را برمی‌داریم. بعد برای لنگهٔ دوم مجبوریم کل جوراب‌ها را از کشو بیرون بیاوریم و تمام‌مدت هم از بدشانسی گله می‌کنیم. آیا بدشانس هستیم یا اینکه واقعیت همین است؟

برای بررسی موضوع چند حالت متفاوت را در نظر می‌گیریم:

یک حالت اینکه ۳ جفت جوراب سفید یک شکل و ۲ جفت جوراب سیاه یک شکل داشته باشیم. با توجه به اینکه لنگهٔ چپ و راست جوراب فرقی ندارد، بنابراین ۴ لنگه جوراب سیاه و ۶ لنگه جوراب سفید در کشو موجود است. این موضوع که دو لنگه جوراب را یکباره برداریم یا در دو مرحله فرقی ندارد. بنابراین فرض می‌کنیم دو لنگه جوراب را با هم برداریم.

در این صورت اگر x را تعداد لنگه جوراب‌های سفید در نظر بگیریم، جدول ۱ را برای توزیع احتمال آن خواهیم داشت.

جدول ۱. توزیع احتمال تعداد جوراب‌های سفید

x	۰	۱	۲
P(x)	$\frac{\binom{6}{0}\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{6}{45}$	$\frac{\binom{6}{1}\binom{4}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{24}{45}$	$\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{0}}{\binom{10}{2}}=\frac{15}{45}$

با مشاهدهٔ نتایج جدول به این نتیجه می‌رسیم که حالت جوراب‌های لنگه‌به‌لنگه ۲۴ مورد است که از مجموع حالت‌های مناسب که ۲۱ مورد است، بیشتر است. پس در این مورد لنگه‌به‌لنگه شدن جوراب‌ها امری طبیعی است و بدشانسی وجود ندارد.

به‌عنوان حالت دوم فرض می‌کنیم که در کشو ۳ جفت جوراب سفید، ۴ جفت جوراب قهوه‌ای و ۵ جفت جوراب مشکی وجود دارد. از این کشو دو لنگه جوراب برمی‌داریم. x را تعداد جوراب‌های سفید و y را تعداد جوراب‌های سیاه در نظر می‌گیریم. در جدول ۲ همهٔ حالت‌های ممکن بیان شده‌اند.

جدول ۲

	۰	۱	۲
۰	$\frac{\binom{۱۰}{۰}\binom{۶}{۰}\binom{۴}{۲}}{\binom{۲۰}{۲}}$	$\frac{\binom{۱۰}{۱}\binom{۶}{۰}\binom{۴}{۱}}{\binom{۲۰}{۲}}$	$\frac{\binom{۱۰}{۲}\binom{۶}{۰}\binom{۴}{۰}}{\binom{۲۰}{۲}}$
۱	$\frac{\binom{۱۰}{۰}\binom{۶}{۱}\binom{۴}{۱}}{\binom{۲۰}{۲}}$	$\frac{\binom{۱۰}{۱}\binom{۶}{۱}\binom{۴}{۰}}{\binom{۲۰}{۲}}$	$\otimes$
۲	$\frac{\binom{۱۰}{۰}\binom{۶}{۲}\binom{۴}{۰}}{\binom{۲۰}{۲}}$	$\otimes$	$\otimes$

با محاسبهٔ مقادیر جدول ۲ به جدول ۳ می‌رسیم.

جدول ۳

	۰	۱	۲
۰	$\frac{۶}{۱۹۰}$	$\frac{۴۰}{۱۹۰}$	$\frac{۴۵}{۱۹۰}$
۱	$\frac{۲۴}{۱۹۰}$	$\frac{۶۰}{۱۹۰}$	$\otimes$
۲	$\frac{۱۵}{۱۹۰}$	$\otimes$	$\otimes$

با بررسی عددهای جدول ۳ حالت‌های لنگه‌بلنگه به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$P(\text{لنگه‌بلنگه}) = P(۰,۱)+P(۱,۰)+P(۱,۱)$$

$$=\frac{۲۴}{۱۹۰}+\frac{۴۰}{۱۹۰}+\frac{۶۰}{۱۹۰}=\frac{۱۲۴}{۱۹۰}$$

بنابراین باز هم لنگه‌بلنگه بودن جوراب‌ها امری طبیعی است و بدشانسی در کار نیست. حالت‌های دیگری هم می‌توان در نظر گرفت. برای بررسی بیشتر فرض می‌کنیم m لنگهٔ سیاه و n لنگهٔ سفید جوراب داشته باشیم. در این صورت احتمال لنگه‌بلنگه شدن به صورت $\frac{mn}{\binom{m+n}{۲}}$ خواهد بود که در جدول ۴ خلاصه شده است.

جدول ۴

	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲
۲	۰/۶۶۶	۰/۵۳۳	۰/۴۲۸	۰/۳۵۵	۰/۳۰۳	۰/۲۶۳
۴	۰/۵۳۳	۰/۵۷۱	۰/۵۳۳	۰/۴۸۴	۰/۴۳۹	۰/۴
۶	۰/۴۲۸	۰/۵۳۳	۰/۵۴۵	۰/۵۲۷	۰/۵	۰/۴۷۰
۸	۰/۳۵۵	۰/۴۸۴	۰/۵۲۷	۰/۵۳۳	۰/۵۲۲	۰/۵۰۵
۱۰	۰/۳۰۳	۰/۴۳۹	۰/۵	۰/۵۲۲	۰/۵۲۶	۰/۵۱۹
۱۲	۰/۲۶۳	۰/۴	۰/۴۷۰	۰/۵۰۵	۰/۵۱۹	۰/۵۲۱

با توجه به جدول ۴ از ۳۶ حالت ۲۰ حالت احتمال لنگه‌بلنگه شدن بیشتر از نصف است. بنابراین با توجه به اینکه کسی نیست که مثلاً ۲۰ جفت جوراب داشته باشد یا اینکه چنین شخصی کمتر پیدا می‌شود، نتیجه می‌گیریم که در حالت طبیعی لنگه‌بلنگه بودن جوراب‌ها اتفاقی عادی است. حال با توجه به جدول می‌توانیم حالت‌های بهتر را انتخاب کنیم.

اما با توجه به جدول می‌بینیم که وقتی تعداد جوراب‌های دو رنگ مساوی است. احتمال لنگه‌بلنگه‌شدن بیشتر از نیم است. حال این موضوع را ثابت می‌کنیم. یعنی:

$$\frac{n^۲}{\binom{۲n}{۲}}>\frac{۱}{۲}$$

فرض می‌کنیم رابطه درست باشد. به روش بازگشتی آن را ثابت می‌کنیم:

$$\frac{n^۲}{\binom{۲n}{۲}}=\frac{۲n^۲}{۲n(۲n-۱)}=\frac{n^۲}{۲n^۲-n}>\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲n^۲>۲n^۲-n\Rightarrow n>۰$$

در صورت نیاز می‌توان مسئله را در حالت کلی بررسی کرد. به این منظور باید نامعادله

$$\frac{mn}{\binom{m+n}{۲}}>\frac{۱}{۲}$$

را برحسب m یا n حل کرد.